

# Chaînes de Markov et files d'attente

Guillaume Matheron

2014

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Chaînes de Markov en temps discret</b>	<b>2</b>
2.1	Généralités . . . . .	2
2.1.1	Définition d'une chaîne de Markov en temps discret . .	2
2.1.2	Matrice de transition . . . . .	3
2.1.3	Utilisation de la matrice de transition . . . . .	3
2.1.4	Représentation en tant que graphe . . . . .	3
2.1.5	Itération de la matrice de transition . . . . .	4
2.2	Propriétés . . . . .	5
2.3	Mesure invariante . . . . .	6
2.4	Étude de la vitesse de convergence . . . . .	7
<b>3</b>	<b>File d'attente M/M/1</b>	<b>9</b>
3.1	Vitesse de convergence . . . . .	9
3.2	Calcul des valeurs propres de P . . . . .	11
3.3	Applications . . . . .	11
3.3.1	Convergence vers une distribution d'équilibre pour une file non limitée . . . . .	11
3.3.2	Étude d'un mouvement brownien avec perturbation . .	14
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>16</b>

# 1 Introduction

Les chaînes de Markov sont un outil mathématique permettant de modéliser l'évolution d'un système dont l'état au temps  $t+1$  ne dépend que de son état au temps  $t$ , et possédant un nombre fini d'états. À chaque étape, le système évolue en changeant d'état. Les probabilités de passer à chaque état au temps  $t+1$  à partir d'un état donné au temps  $t$  peuvent être regroupées sous forme d'une matrice carrée dont les propriétés algébriques nous renseignent sur l'évolution du système.

Ce document s'intéresse à l'étude de l'évolution des systèmes à partir de leur matrice de transition. En particulier, on énoncera une condition suffisante de convergence et une majoration de la vitesse de convergence dans ce cas. On s'intéressera aux cas limite où l'intervalle de temps entre deux étapes de la simulation tend vers 0, ou lorsque le nombre d'états tend vers l'infini.

## 2 Chaînes de Markov en temps discret

### 2.1 Généralités

#### 2.1.1 Définition d'une chaîne de Markov en temps discret

**DÉFINITION 1** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de variables aléatoires à valeurs dans  $E$  un ensemble fini. Cette famille est une chaîne de Markov si elle vérifie la propriété de Markov : pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout couple  $(y, z)$  de suites à valeurs dans  $E$  définies sur  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a l'égalité :

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = j | X_n = i, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, X_k = y_k) \\ &= P(X_{n+1} = j | X_n = i, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, X_k = z_k). \end{aligned}$$

Autrement dit la valeur de la variable  $X_n$  ne dépend que de la valeur de la variable  $X_{n-1}$ , et pas de tous ses états antécédents. On écrit alors plus simplement la probabilité de transition d'un état au suivant ainsi :

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

**Chaîne de Markov homogène** Une chaîne de Markov est dite homogène si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i).$$

Autrement dit une chaîne est homogène si la probabilité de transition d'un état à l'autre ne dépend pas de l'indice de la variable concernée mais uniquement de sa valeur : l'évolution du processus ne dépend pas de l'origine des temps. Dans toute la suite, nous ne manipulerons que des chaînes homogènes.

### 2.1.2 Matrice de transition

$E$  étant fini à  $n$  éléments, on l'identifie à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On définit alors naturellement une matrice à coefficients réels à partir des probabilités de transition. On exprime les coefficients de la matrice :

$$\forall (i, j) \in E^2, p_{i,j} = P(X_1 = j | X_0 = i).$$

Remarquons que dans ce cas la matrice est stochastique ligne, c'est-à-dire que :

$$\forall i \in E, \sum_{j \in E} p_{i,j} = 1.$$

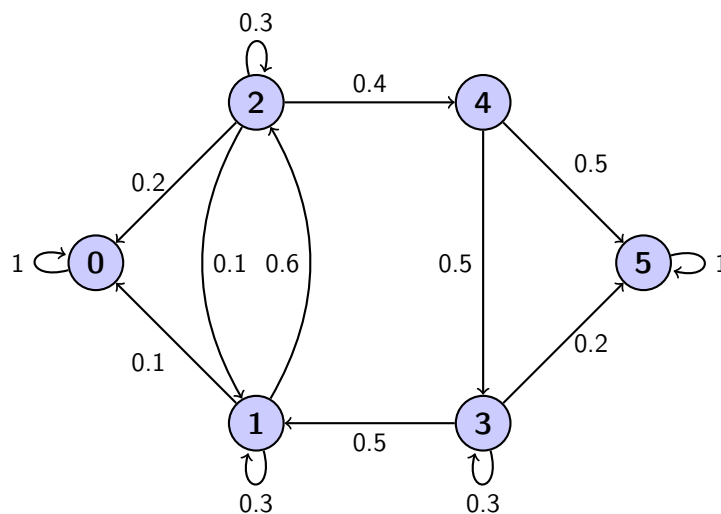
### 2.1.3 Utilisation de la matrice de transition

Si  $X$  est un vecteur ligne décrivant les probabilités de se trouver dans chaque état au temps  $t$ , le vecteur ligne  $X \cdot P$  représente les probabilités de se trouver dans chaque état au temps  $t+1$ .

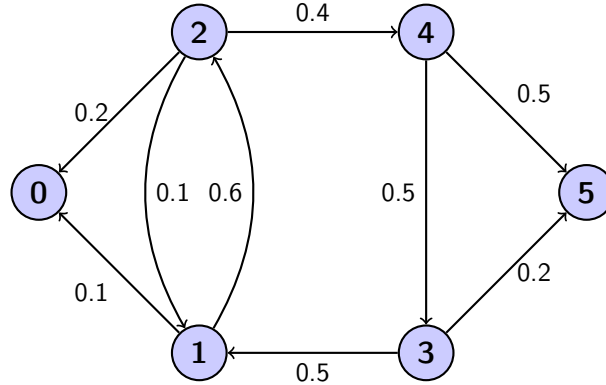
Cette définition est pratique pour l'interprétation probabiliste des chaînes de Markov, mais pas pour l'interpréter comme un endomorphisme opérant sur un vecteur colonne  $X$  de distribution de probabilités. En effet il faut alors multiplier à gauche :  ${}^tX' = {}^tX \cdot P$ . Dans la suite on étudiera les valeurs propres de cet endomorphisme, qui correspondent aux valeurs propres à gauche de  $P$ , ou plus simplement aux valeurs propres usuelles de  ${}^tP$ .

### 2.1.4 Représentation en tant que graphe

On peut interpréter la matrice de transition  $P$  comme une matrice d'adjacence d'un graphe orienté. Les arêtes du graphe sont indicées par la probabilité de passage d'un état à l'autre.



La somme des probabilités de passage est toujours égale à 1, on peut donc omettre les boucles :



On peut écrire la matrice correspondant à cette chaîne :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 2.1.5 Itération de la matrice de transition

**Probabilité de transition d'un état  $i$  à un état  $j$  en  $n$  étapes** On peut se demander s'il est possible d'itérer le processus, c'est-à-dire de déterminer la probabilité de passer d'un état  $i$  à un état  $j$  en  $n$  étapes, pour  $n \in \mathbb{N}$ . On note cette probabilité :

$$p_{i,j}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

On note  $P^{(n)}$  la matrice des coefficients  $p_{i,j}^{(n)}$ .

THÉORÈME 1 (Chapman-Kolmogorov)

$$\forall n \in \mathbb{N}, P^{(n)} = P^n$$

*Preuve* : Immédiat d'après

$$P(X_{n+m} | X_0 = i) = \sum_{k \in E} P(X_m = k | X_0 = i) \cdot P(X_n = j | X_0 = k)$$

donc

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \forall (i, j) \in E^2, p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} p_{i,k}^{(m)} \cdot p_{k,j}^{(n)}$$

□

## 2.2 Propriétés

**Remarque** L'objectif de ce TIPE étant l'étude de  $P$  comme un endomorphisme pour se rapprocher du programme, on cherchera ici à expliquer sous quelles conditions une chaîne de Markov converge vers un état stable, en admettant la majorité des résultats pour se concentrer sur les démonstrations algébriques qui suivent.

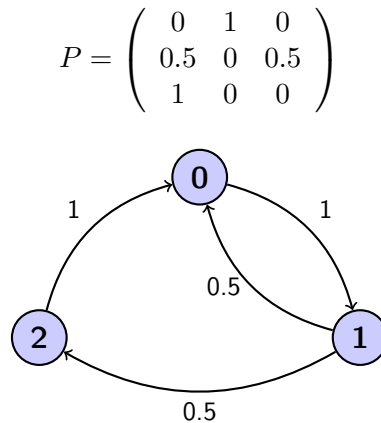
**DÉFINITION 2** (État transient, récurrent) Un état est dit transient si, en partant de cet état au temps  $t$ , il existe une probabilité non nulle de ne jamais repasser par cet état. Un état non transient est dit récurrent.

**DÉFINITION 3** (Période d'un état récurrent  $i$ )

$$k_i = \text{pgcd}\{n | P(X_n = i | X_0 = i) > 0\}.$$

Ainsi la période d'un état  $i$  n'est pas nécessairement la durée la plus courte au bout de laquelle on peut revenir à l'état  $i$  après l'avoir quitté. Cette définition garantit cependant que tout retour à l'état  $i$  ne peut se faire qu'après un nombre d'étapes multiple de  $k_i$ . Si tout état a une période égale à 1, la chaîne est dite apériodique.

**Exemple** Dans la chaîne ci-dessous, tous les états sont apériodiques mais la matrice ne contient que des zéros sur sa diagonale, c'est-à-dire qu'on ne peut jamais revenir à l'état  $i$  en 1 pas.



**DÉFINITION 4** (Temps moyen de récurrence d'un état  $i$  récurrent) Même si un état est récurrent, l'espérance du temps après lequel la chaîne reviendra en cet état peut être infinie, on note alors  $M_i = +\infty$ . Dans le cas général, on a :

$$M_i = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{i,i}^{(n)}$$

DÉFINITION 5 (Chaîne irréductible) Une chaîne de Markov est dite irréductible si son graphe est fortement connexe, c'est-à-dire que pour tout couple  $(i, j)$  d'états, un chemin relie les deux états dans cet ordre.

### 2.3 Mesure invariante

DÉFINITION 6 Soit  $\pi$  un vecteur ligne à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .  $\pi$  est une mesure invariante si :

- $\forall j, 0 \leq \pi_j \leq 1$
- $\sum_j \pi_j = 1$
- $\forall j, \pi_j = \sum_i \pi_i p_{i,j}$

Une mesure invariante existe si et seulement si tout état  $i$  est récurrent et  $M_i < +\infty$  (admis). Dans ce cas,  $\pi$  est unique et si on note :

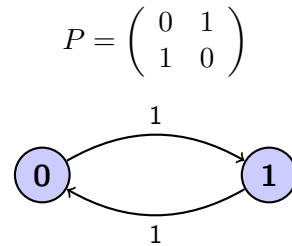
$$\forall j, v_j = \frac{1}{M_j}$$

alors on a (admis) :

$$\pi = \frac{v}{\|v\|}$$

**Attention!** Même lorsqu'une mesure invariante existe, l'état de la chaîne ne converge pas forcément pour toute distribution, c'est-à-dire qu'il existe bien un vecteur  $\pi$  tel que  $\pi P = \pi$  mais la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n$  n'existe pas forcément.

**Exemple** Dans l'exemple simple suivant, tout état est bien récurrent et de temps moyen de récurrence fini, mais la chaîne n'est pas apériodique donc la mesure invariante n'est pas distribution d'équilibre.



DÉFINITION 7 Si tout état est récurrent et que la chaîne est apériodique et irréductible,  $\pi$  est appelé distribution d'équilibre et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{i,j}^{(n)} = \pi_j$$

*Démonstration.* La preuve est une conséquence du théorème de Perron-Frobenius, énoncé ci-après.  $\square$

**Condition suffisante de convergence** La suite des puissances de la matrice de passage  $P$  tend donc sous ces conditions (tout état est récurrent et la chaîne est apériodique et irréductible) vers une matrice dont chaque ligne est identique et égale au vecteur ligne  $\pi_j$ .

## 2.4 Étude de la vitesse de convergence

On se place dans toute cette section dans le cas d'une chaîne irréductible et apériodique.

On note ici  $P$  la matrice stochastique *colonne* associée à la chaîne de Markov, soit la transposée de la matrice introduite précédemment.

On suppose qu'il existe un vecteur colonne  $\pi$  stochastique vérifiant :

$$\pi = P \cdot \pi.$$

$\pi$  est donc vecteur propre de la valeur propre  $\lambda_1 = 1$ .

LEMME 1 Si  $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$  est de rayon spectral  $\rho$ , alors  $\|M^n\| = O(n^{k+1}|\rho^n|)$ .

*Démonstration.* 1<sup>er</sup> cas :  $M$  n'admet qu'une valeur propre  $\omega$ .

$M$  est semblable à  $\omega I_k + R$  avec  $R \in \mathcal{T}_k^{++}(\mathbb{C})$

On définit  $N = M - \omega I_k$ .

$N$  a pour seule valeur propre 0, donc  $N$  est nilpotente.

$$\forall n \geq k, M^n = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \omega^{n-i} N^i$$

$$\forall n \geq k, \|M^n\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \omega^{n-i} \|N^i\| = O(n^{k+1}|\omega^n|)$$

car  $\binom{n}{i}$  est polynomial en  $n$  de degré  $i$ .

2<sup>eme</sup> cas :  $M$  admet  $p$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  distinctes 2 à 2.

On effectue la décomposition classique de  $M$  en blocs diagonaux pour se ramener au premier cas :

$$\chi_M = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

$$\mathbb{R}^k = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker} (M - \lambda_i I_k)^{\alpha_i}$$

On se ramène ainsi au premier cas en se plaçant sur  $M$  restreint à  $\text{Ker} (M - \lambda_i I_k)^{\alpha_i}$  pour chaque sous-espace caractéristique (possible grâce au lemme des noyaux car  $M$  stabilise tous ses sous-espaces caractéristiques).  $\square$

THÉORÈME 2 (Perron-Frobenius)  $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$  représentant une chaîne de Markov irréductible dont tout état est récurrent et apériodique.

1 est valeur propre d'après ce qui précède.

On a alors  $\forall \lambda_j \in sp(A), 1 = \lambda_1 > |\lambda_j|$ .

De plus, soient  $\lambda_2, \dots, \lambda_k$  les autres valeurs propres de  $A$  ordonnées telles que  $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_k|$ .

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A^n = C + O(n^{k-1}|\lambda_2|^n).$$

*Démonstration.* On ne démontrera ici que le second point, c'est-à-dire qu'on admettra l'existence de  $\lambda_1 = 1$  comme valeur propre de  $M$  et que cette valeur propre est de multiplicité 1.

$$\chi_A = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i) = (X - \lambda_1)Q(X)$$

avec

$$Q(X) = \prod_{i=2}^k (X - \lambda_i)$$

et  $Q(\lambda_1) \neq 0$ .

$$\mathbb{C}^k = \text{Ker}(A - \lambda_1 I_n) \oplus \text{Ker} Q(A)$$

avec  $\text{Ker} Q(A)$  hyperplan stable par  $A$ .

$$A = Q \left( \begin{array}{c|c} \lambda_1 & (0) \\ \hline 0 & B \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right) Q^{-1}$$

avec  $Sp(B) = \lambda_2, \dots, \lambda_r$ .

$$A^n = Q \left( \begin{array}{c|c} \lambda_1^n & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & B^n \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right) Q^{-1} = \underbrace{Q \left( \begin{array}{c|c} \lambda_1^n & (0) \\ \hline & \end{array} \right) Q^{-1}}_{\lambda_1^n C} + \underbrace{Q \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & B^n \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right) Q^{-1}}_{O(n^{k-1}|\lambda_2|^n)}.$$

□



CORROLAIRE 1 Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, la mesure invariante  $\pi$  existe et est la distribution d'équilibre. On a notamment :

$$C = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}.$$

### 3 File d'attente M/M/1

On étudie ici spécifiquement le cas d'une file d'attente M/M/1 limitée en temps discret.

Le terme  $M/M/1$  est issu de la notation de Kendall :

- M : processus d'entrée de Poisson ;
- M : processus de service de Poisson ;
- 1 : un seul serveur traite la file.

Soit  $N \in \mathbb{N}$ , on limite à  $N$  la longueur de la file d'attente. À chaque étape, la longueur de la file varie au maximum de 1. La probabilité que la file s'allonge est  $0 < \mu < 0.5$ , et la probabilité que la file se raccourcisse est  $\mu < \lambda < 1 - \mu$ . Si la file est vide (état 0), elle ne peut pas se raccourcir et si la file est pleine (état  $N - 1$ ), elle ne peut pas s'allonger.  $\mu$  est appelé taux d'arrivées, et  $\lambda$  taux de service. On a en outre  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$ ,  $\mu < \lambda$  et  $\mu + \lambda < 1$ .

Le processus ainsi décrit est représenté par la matrice stochastique ligne  $P$  suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \mu & \mu & & & & & (0) \\ \lambda & 1 - \lambda - \mu & \mu & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda & 1 - \lambda - \mu & \mu \\ (0) & & & & & \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

#### 3.1 Vitesse de convergence

THÉORÈME 3

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|P^n - \lim_{k \rightarrow +\infty} P^k\| = |\omega_2|^n$$

pour une certaine norme ne dépendant que de  $P$ , où  $\omega_2$  est la plus grande valeur propre en valeur absolue de  $P$  telle que  $|\omega_2| < 1$ .

*Démonstration.* Soit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \frac{\mu}{\lambda} & & & \\ & & \frac{\mu^2}{\lambda^2} & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \frac{\mu^{n-1}}{\lambda^{n-1}} \end{pmatrix}$$

On a  $D \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire  $D$  symétrique définie positive.

Soit  $S = DP$  donc  $P = D^{-1}S$

Un calcul matriciel par récurrence donne  $S \in S_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire  $S$  symétrique.

On définit le produit scalaire :  $\langle \cdot, \cdot \rangle : (X, Y) \mapsto {}^tXDY$  et  $f : X \mapsto PX$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \langle f(Y), X \rangle &= {}^t(PY)DX \\ &= {}^tY{}^tPDX \\ &= {}^tY{}^t(D^{-1}S)DX \\ &= {}^tYSD^{-1}DX \\ &= {}^tYSX \\ &= {}^tY(DP)X \\ &= {}^tYD(PX) \\ &= \langle Y, f(X) \rangle . \end{aligned}$$

$f$  est donc symétrique pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Soit  $B$  une base orthonormée pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , il existe  $Q \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $P = QP'Q^{-1}$  où  $P'$  est la matrice de  $f$  dans  $B$ , et  $Q$  la matrice de changement de base correspondante.

On a alors  $P'$  symétrique réelle donc diagonalisable, d'où il existe  $R \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $P' = RP''R^{-1}$  avec  $P''$  réelle diagonale.

Ainsi  $P = QRP''R^{-1}Q^{-1}$

Quitte à permuter les colonnes de  $R$ , on peut supposer que  $P''$  est de la forme  $Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$  avec  $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_N|$ .

D'après les résultats admis de la première section, 1 est valeur propre à gauche de  $P$ , et on admet  $1 \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_N|$ .

Soit  $p \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$  tel que  $\lambda_1 = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_p| = 1$  et  $|\lambda_{p+1}| \neq 1$

Soit  $H = QR$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

$$P^n = HP''^n H^{-1} = HDiag(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1, \lambda_{p+1}^n, \dots, \lambda_N^n)H^{-1}$$

Ainsi, en utilisant la norme  $\|\cdot\| : M \mapsto \|H^{-1}MH\|_\infty$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|P^n - HDiag(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1, 0, \dots, 0)H^{-1}\| = |\lambda_{p+1}|^n.$$

□

### 3.2 Calcul des valeurs propres de P

On admet le théorème donné par l'article [9] :

THÉORÈME 4

$$\text{sp}(P) = \left\{ 2\sqrt{\lambda\mu} \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) + 1 - \lambda - \mu \mid k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \right\} \cup \{1\}$$

Ainsi on a :

CORROLAIRE 2

$$\omega_2 = 2\sqrt{\lambda\mu} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) + 1 - \lambda - \mu$$

### 3.3 Applications

#### 3.3.1 Convergence vers une distribution d'équilibre pour une file non limitée

**Vitesse de convergence** Ici on étudie le comportement d'une file d'attente avec  $\lambda$  et  $\mu$  fixés lorsque  $N \rightarrow +\infty$ . En effet, il est intéressant d'étudier une file d'attente où les clients ne sont jamais rejetés, c'est-à-dire que la file d'attente peut être aussi longue que nécessaire pour accueillir tous les clients. Cette section permet de quantifier l'écart au modèle provoqué par la restriction de la longueur de la file et étudier son comportement lorsque  $N \rightarrow +\infty$ .

Notons que la limite vers laquelle  $P^n$  converge dépend de  $N$ . En effet, lorsque la longueur de la file est restreinte, la probabilité associée au dernier état par la distribution d'équilibre est plus importante.

Le théorème 3 appliqué avec  $\omega_2$  donné par le corrolaire 2 donne la suite à double entrée  $u_{N,n} = \|P_N^n - P_N^\infty\|$  où  $P_N^n$  représente la matrice de transition de taille  $N$  itérée  $n$  fois et  $P_N^\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} P^k$ .

On a alors l'expression explicite :

$$u_n = (2\sqrt{\lambda\mu} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) + 1 - \lambda - \mu)^n.$$

On peut ainsi faire tendre  $N$  vers  $+\infty$  uniformément par rapport à  $n$  :

$$u_{\infty,n} = (2\sqrt{\lambda\mu} + 1 - \lambda - \mu)^n.$$

**Expression explicite de la distribution d'équilibre** Soit  $X = (x_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  la distribution d'équilibre associée à  $P$  stochastique colonne. On a donc :

$$\begin{cases} PX = X \\ \sum_{i=1}^N x_i = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Soit :

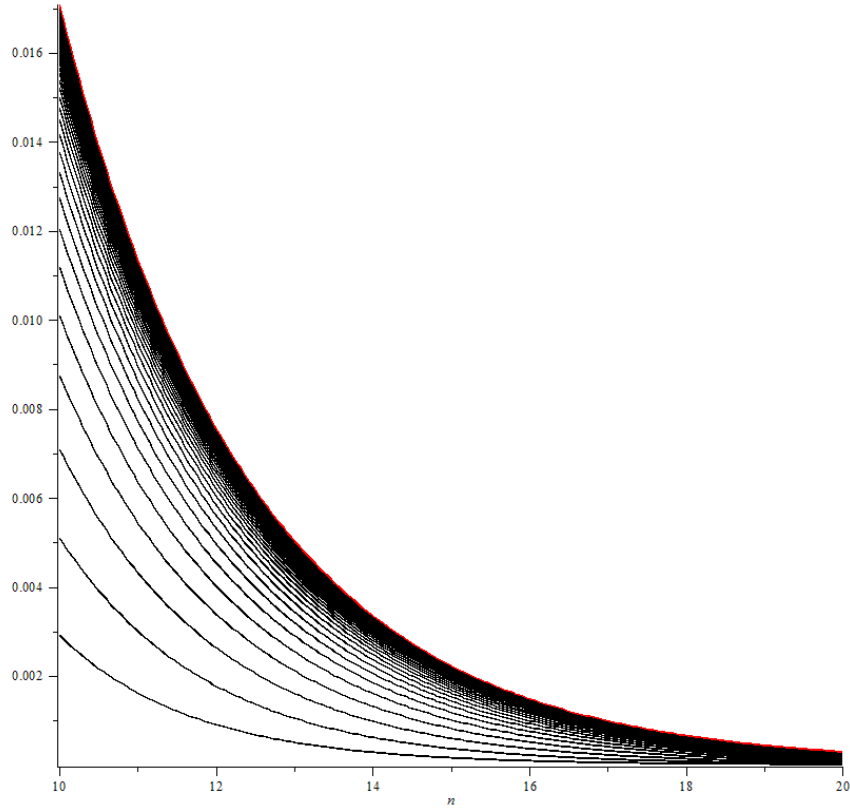


FIGURE 1 –  $u_{N,n}$  en fonction de  $n$  pour  $5 \leq N \leq 100$ ,  $\lambda = 0.8$ ,  $\mu = 0.1$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \left( \frac{{}^tP - I}{1 \dots 1} \right) \\ Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{N zéros}$$

On a alors : (1)  $\Leftrightarrow QX = Y$ .

Cette équation est résoluble numériquement en temps  $O(N^2)$  dans le cas général d'une chaîne de Markov admettant une unique distribution d'équilibre, mais dans le cas d'une file M/M/1, on peut calculer  $X$  explicitement à partir de (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \mu)x_1 + \lambda x_2 = x_1 \\ \forall i \in \llbracket 1, N - 2 \rrbracket, \mu x_i + (1 - \lambda - \mu)x_{i+1} + \lambda x_{i+2} = x_{i+1} \\ \mu x_{N-1} + (1 - \lambda)x_N = x_N \end{cases}$$

Soit  $\rho = \frac{\mu}{\lambda}$   
 On a alors :

$$(1) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 2, N \rrbracket, x_i = \rho^{i-1} x_1$$

Or, la condition  $\sum_{i=1}^N x_i = 1$  impose :

$$\sum_{i=1}^N \rho^{i-1} x_1 = 1$$

d'où :

$$x_1 \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho} = 1$$

ainsi on a :

$$x_1 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^N}.$$

On en déduit l'expression explicite de la distribution d'équilibre :

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, x_i = \rho^{i-1} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^N}.$$

La limite correspond à une file d'attente illimitée :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, x_i = \rho^{i-1} (1 - \rho).$$

On en déduit également des informations intéressantes sur le comportement de la file d'attente :

Proportion de temps libre du serveur (0 clients dans la file) :  $\frac{1 - \rho}{1 - \rho^N}$

$$\text{Espérance d'attente dans la file : } E = \sum_{i=1}^N i \rho^{i-1} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^N}.$$

Le calcul donne :

$$E = \frac{\rho^{N+1}((N+1)\rho - N - 1 - \rho)}{\rho(\rho^N - 1)(\rho - 1)} + \frac{1}{(\rho^N - 1)(\rho - 1)}$$

Dans le cas d'une file d'attente illimitée, on obtient une espérance :

$$E_{\text{file illimitée}} = \frac{1}{1 - \rho}$$

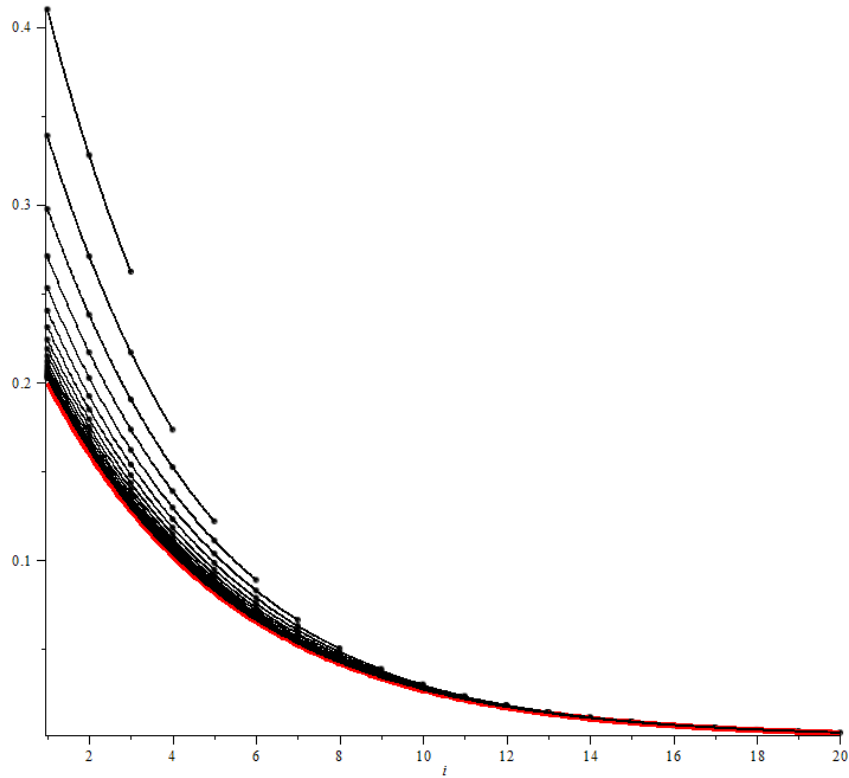


FIGURE 2 –  $x_i$  pour  $3 \leq N \leq 20$  avec  $\mu = 0.4$  et  $\lambda = 0.5$

### 3.3.2 Etude d'un mouvement brownien avec perturbation

On imagine une particule  $M$  libre de se déplacer sur un axe  $[0, 1]$  de taille 1 mètre. La particule se déplace aléatoirement à gauche ou à droite avec des probabilités différentes. On souhaite connaître la courbe de convergence du système, et la distribution d'équilibre, c'est-à-dire la répartition de probabilités de trouver la particule dans l'espace.

On modélise ce système en discrétisant le temps et l'espace simultanément : on découpe l'espace en  $N$  portions de même taille que l'on représente par  $N$  états d'une chaîne de Markov du type étudié précédemment. On suppose que la vitesse de la particule est  $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Si la particule part de 0 m et va toujours vers la droite, il faut donc 1 s pour qu'elle atteigne 1 m. Or, dans le modèle utilisé, il faut au minimum  $N$  itérations de la chaîne de Markov pour parcourir tous les états, d'où une seconde de simulation correspond à  $N$  itérations du modèle.

Précisons à présent le mouvement de la particule.

Entre le temps  $t$  et  $t + dt$ , la probabilité que la particule se déplace vers la gauche est  $\tilde{\lambda}dt$  avec  $\tilde{\lambda}$  en  $\text{s}^{-1}$ . De même, la probabilité que la particule se déplace vers la droite est  $\tilde{\mu}dt$ .

À chaque étape de simulation, la probabilité que la particule se déplace vers la gauche (resp. la droite) est donc  $\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{N}$  (resp.  $\mu = \frac{\tilde{\mu}}{N}$ ).

On définit  $P$  la matrice de transition stochastique ligne de cette chaîne de Markov :

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \mu & \mu & & & & & (0) \\ \lambda & (1 - \lambda - \mu) & \mu & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda & (1 - \lambda - \mu) & \mu & \\ (0) & & & & \lambda & & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

On souhaite une fois de plus étudier la vitesse de convergence de cette chaîne vers une distribution d'équilibre. On cherche donc à tracer  $f_N = \|P^n - \lim_{k \rightarrow +\infty} P^k\|$  en fonction du temps  $t$ . L'étape de simulation au temps  $t$  est  $Nt$  d'après ce qui précède, d'où

$$f_N(t) = \left( 2 \frac{\tilde{\lambda}}{N} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}}} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) + 1 - \frac{\tilde{\lambda}}{N} - \frac{\tilde{\mu}}{N} \right)^{Nt}.$$

On a également la limite quand  $N$  tend vers  $+\infty$  qui correspond à la limite recherchée dans le cas continu :

$$f_\infty(t) = e^{2t\tilde{\lambda}\sqrt{\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}}} - t\tilde{\lambda} - t\tilde{\mu}}.$$

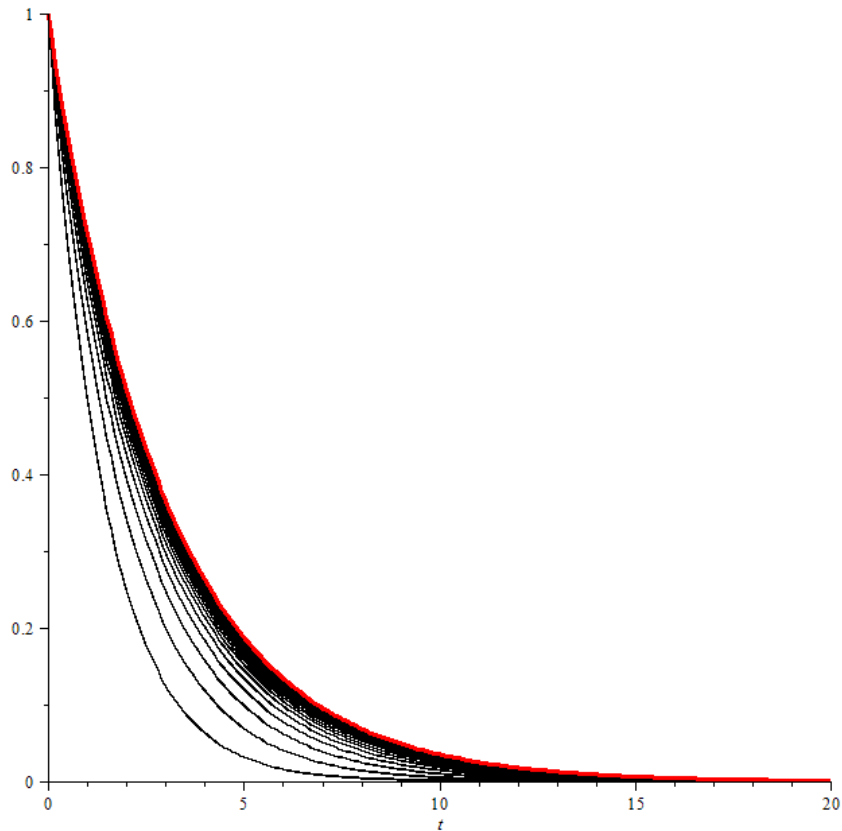


FIGURE 3 –  $f_N(t)$  pour  $3 \leq N \leq 100$  avec  $\mu = 0.1$  et  $\lambda = 0.8$

## 4 Conclusion

Cette étude a rencontré plusieurs écueils, dont certains ont été surmontés (par exemple avant de trouver la formule explicite des valeurs propres d'une file M/M/1, j'ai essayé de contrôler les valeurs propres via des entrelacements de racines), et d'autres sont restés sans réponse (par exemple comment, dans le cas général, faire le lien avec la théorie des chaînes de Markov discrètes, ou comment intégrer la notion de simultanéité dans le processus d'arrivée de Poisson). De plus, les probabilités n'étant pas au programme de classes préparatoires MP, il est difficile de s'intéresser précisément aux conditions de convergence d'une chaîne de Markov.

Cependant, ce travail m'a permis de m'ouvrir aux différents processus de la recherche scientifique.



## Références

- [1] Ivo Adan and Jacques Resing, *Queueing theory*, 2002.
- [2] Pierre Brémaud, *Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*, Springer, 1999.
- [3] Arthur Engel, *Processus aléatoires pour les débutants*, Cassini, 1976.
- [4] Daniel Flipo, *Chaînes de Markov*, <http://daniel.flipo.free.fr/cours/markov.pdf>.
- [5] John G. Kemeny and J. Laurie Snell, *Finite Markov chains*, Springer, 1960.
- [6] John G. Kemeny, J. Laurie Snell, and Anthony W. Knapp, *Denumerable Markov chains*, Springer, 1966.
- [7] Carl D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, 2000.
- [8] Daniel W. Stroock, *An introduction to Markov processes*, Springer, 2005.
- [9] Sui Sun Cheng Wen-Chyuan Yueh, *Explicit eigenvalues and inverses of tridiagonal Toeplitz matrices with four perturbed corners*, ANZIAM, 2008.
- [10] Ward Whitt, *Continuous-time Markov chains*, [www.columbia.edu/~ww2040](http://www.columbia.edu/~ww2040), 2006.
- [11] Moshe Zukerman, *Introduction to queuing theory and stochastic teletraffic models*, <http://www.ee.cityu.edu.hk/~zukerman/classnotes.pdf>, 2011.